ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α).** Αν Α υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f (x).

Μονάδες 2

β) **i.** Μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη, όταν είναι 1 – 1.

Μονάδα 1

ii. Αν $f: A \to R$ μια συνάρτηση και εφόσον αυτή είναι 1 – 1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών f (A) της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μια στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Μονάδες 3

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0) = 0$.

Δηλαδή αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 4

Α3. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

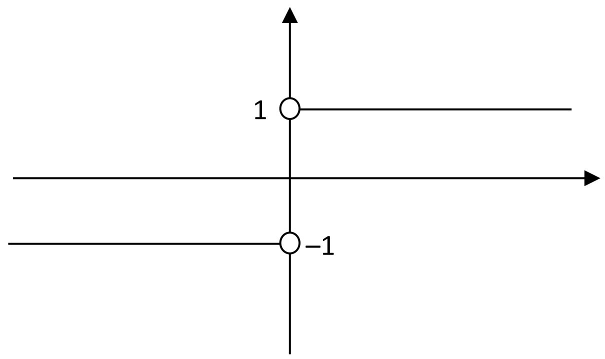
Μονάδες 5

Α4. **α.** Λάθος

Μονάδα 1

Η $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ έχει $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in A$, αλλά δεν είναι σταθερή.

Η γραφική παράσταση είναι:



Μονάδες 3

β. Λάθος

Μονάδα 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

ενώ $f(1) = 3$

Μονάδες 3

A5. $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$

Άρα γ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη άρα:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + \lambda\right) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x} + \lambda\right) = 2 \quad (1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Οπότε η (1) γίνεται: $0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

Μονάδες 3

Β2. $f(x) = e^{-x} + 2$

Θέτω συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x$.

- Η g είναι συνεχής στο [2, 3] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών.
- $\left.\begin{array}{l} g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 < 0 \end{array}\right\} g(2)g(3) < 0$

Επομένως από Θ.Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ δηλαδή $f(x) - x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).

Η g είναι παραγωγίσιμη με:

$g'(x) = \left(e^{-x} + 2 - x\right)' = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0,$ για κάθε $x \in (2, 3)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (2, 3) οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Μονάδες 7

Β3. **<u>α΄ τρόπος:</u>**

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

Η f παραγωγίσμη με: $f'(x) = \left(e^{-x} + 2\right)' = -e^{-x} < 0$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1.

<u>β΄ τρόπος</u>

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow e^{-x_1} + 2 = e^{-x_1} + 2 \Leftrightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \overset{e^{-x}:1-1}{\Leftrightarrow} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα 1 – 1.

Θέτω $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow \quad e^{-x}=y-2 \underset{y>2}{\overset{y-2>0}{\Leftrightarrow}} \ell n e^{-x}=\ell n(y-2) \Leftrightarrow -x=\ell n(y-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\ell n(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ell n(y-2)$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2)$, $D_{f^{-1}}=(2,+\infty)$

Μονάδες 6

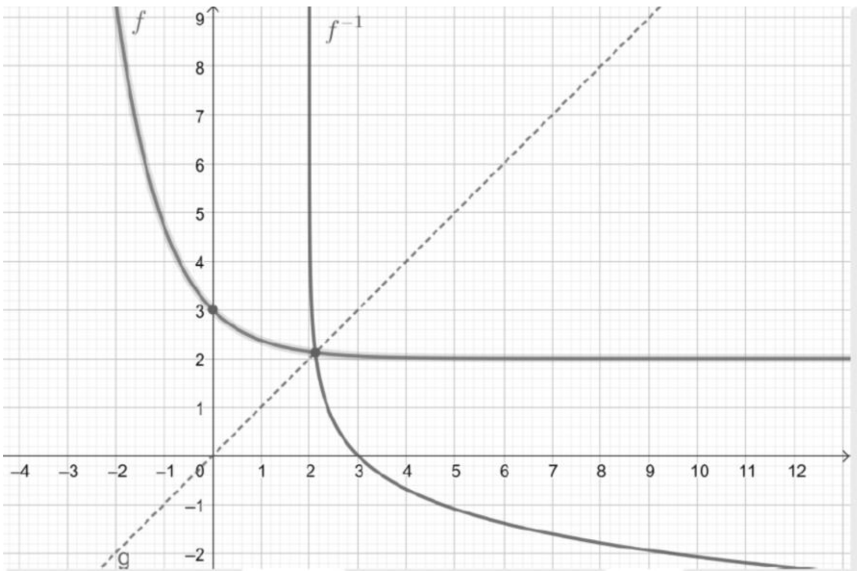
B4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ell n(x-2)\right] \underset{\substack{\text{για } x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}(-\ell n u)=+\infty$

Η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

$f(x)=e^{-x}+2=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x+2$.

Η C_f είναι μετατόπιση της γρ. παράστασης της $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$.



Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1\\ e^{x-1}+\beta x, & x<1\end{cases}$$

Γ1. Η f πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0=1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha=f(1)$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=e^0+\beta=1+\beta$

Άρα πρέπει $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\beta}$

Επίσης

- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\beta=\alpha}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}(x-1)'+\alpha}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(e^{x-1}+\alpha\right)=1+\alpha$

Άρα πρέπει $1+\alpha=2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$ οπότε και $\boxed{\beta=1}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

Μονάδες 5

Γ2. $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\ge1 \\ e^{x-1}+1, & x<1 \end{cases}$

Για $x\ge1$ έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$: απορρίπτεται

Για $x<1$ έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=-1$ αδύνατη

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$2x$		$+$
$e^{x-1}+1$	$+$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Σύνολο τιμών $f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ όπου:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ διότι:

Θέτω $u=x-1$ και έχω $u\to-\infty$ όταν $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-1}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Επομένως $\boxed{f(\mathbb{R})=\mathbb{R}}$

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και 1 – 1, οπότε έχει το πολύ 1 ρίζα.

<u>α΄ τρόπος</u>

- Η f είναι συνεχής στο [-1, 0] ως παρωγίσιμη
- $\left.\begin{aligned} & f(0)=\frac{1}{e}>0 \\ & f(-1)=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}<0 \end{aligned}\right\} f(-1)f(0)<0$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(-1,0)\subseteq\mathbb{R}$ με $f(x_o)=0$. Η f όμως είναι 1 – 1, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

<u>β΄ τρόπος</u>

Στο $(-\infty,0)$ αφού η f συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχουμε σύνολο τιμών:

$f((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ (αφού $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=\frac{1}{e}$)

Όμως $0\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$, άρα υπάρχει $x_o\in(-\infty,0)$ με $f(x_o)=0$ και επειδή η f είναι 1 – 1, η ρίζα είναι μοναδική.

Μονάδες 4

ii. $f^2(x)-x_of(x)=0\Leftrightarrow \boxed{f^2(x)=x_of(x)\ \ (1)}$

Έχουμε ότι $x\in(x_o,+\infty)$, οπότε $x>x_o\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(x_o)$

Άρα $f(x)>0$

Όμως $x_o<0$. Άρα $x_of(x)<0$ (2) για κάθε $x\in(x_o,+\infty)$

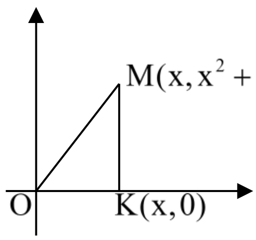
Έχουμε $f^2(x)>0$ (3) για κάθε $x\in(x_o,+\infty)$.

Από (2) και (3) έχω ότι η (1) είναι αδύνατη για κάθε $x\in(x_o,+\infty)$

Μονάδες 4

Γ4. Αφού $x\geq1$ το Μ κινείται στην $f(x)=x^2+1$. Άρα $y(t)=x^2(t)+1$

$x'(t_o)=2$ και $x(t_o)=3$



$$E_{OMK}=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{1}{2}|x||x^2+1| \text{ επειδή } x>1$$

$$E_{OMK}=\frac{1}{2}x\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x$$

$$E(t)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t)$$

$$E'(t)=\frac{1}{2}3x^2(t)x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)$$

Για $t=t_o$: $E'(t_o)=\frac{3}{2}x^2(t_o)x'(t_o)+\frac{1}{2}x'(t_o)=\frac{3}{2}(3)^2 2+\frac{1}{2}2=27+1\Rightarrow E'(t_0)=28\tau\mu/\sec$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων με:

$$f'(x)=\ell n(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

Αφού η ε εφάπτεται στην C_f στο $A(1,1)$ θα ισχύουν:

$$\left.\begin{matrix} f(1)=1 \\ f'(1)=1 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta=1 \\ \alpha=-1 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{matrix}$$

Μονάδες 4

Δ2. Για $\alpha=-1$ και $\beta=2$, είναι $f(x)=(x-1)\ell n\left(x^2-2x+2\right)-x+2$

Για $x\in[1,2]$ έχουμε $f(x)\geq -x+2\Leftrightarrow (x-1)\ell n\left(x^2-2x+2\right)-x+2\geq -x+2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ell n\left(x^2-2x+2\right)\geq 0\Leftrightarrow (x-1)\ell n\left[x^2-2x+1+1\right]\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ell n\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x\in[1,\ 2]$$

αφού για $x\geq 1\Leftrightarrow x-1\geq 0$ και $(x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow \ell n\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$

Επομένως $E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left(f(x)+x-2\right)dx=\int_1^2(x-1)\ell n\left[(x-1)^2+1\right]dx$

Θέτουμε $u=(x-1)^2+1$, όπου $du=2(x-1)dx\Leftrightarrow \frac{1}{2}du=(x-1)dx$ και $u_1=1$, $u_2=2$

Άρα έχουμε: $E=\frac{1}{2}\int_1^2\ell nudu=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ell nudu\overset{\text{ΚΠΟ}}{=}\frac{1}{2}\left[u\ell nu\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=$

$$=\frac{1}{2}(2\ell n2)-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ell n2-\frac{1}{2}\ \tau.\mu$$

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Για $\alpha=-1$, είναι $f'(x)=\ell n\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2+1\geq 0\Leftrightarrow \ell n\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0\\ \text{και}\quad \left.\begin{array}{l}x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1>0\\ (x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow 2(x-1)^2\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\ell n\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0\Leftrightarrow \ell n\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\geq -1,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 3

ii. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ell n\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ell n\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}\quad (1)$$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Από το ερώτημα Δ3 i) έχουμε ότι:

$$f'(\xi)\geq -1\Leftrightarrow\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\ \text{δηλαδή η (1)}$$

Μονάδες 5

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(x_1,f(x_1)\right)$ είναι η:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)\quad(\varepsilon_1)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B\left(x_2,g(x_2)\right)$ είναι η:

$$y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)\quad(\varepsilon_2)$$

Για να ταυτίζονται οι ε_1, ε_2 πρέπει:

$f'(x_1)=g'(x_2)$ (2) και $f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2)$ (3)

Για $x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=\left(-x^3-x+2\right)'=-3x^2-1$

Από το ερώτημα Δ3 i) ισχύει ότι $f'(x_1)\geq -1$ και λόγω της (2) πρέπει:

$g'(x_2)\geq -1 \Leftrightarrow -3x_2^2-1\geq -1 \Leftrightarrow -3x_2^2\geq 0 \Leftrightarrow x_2^2\leq 0 \Leftrightarrow x_2=0$

Για $x_2=0,$ $g'(0)=-1$ άρα η (2) γίνεται:

$$f'(x_1)=-1 \Leftrightarrow \ell n\left(x_1^2-2x_1+2\right)+\frac{2\left(x_1-1\right)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1=-1 \Leftrightarrow \ell n\left[\left(x_1-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x_1-1\right)^2}{x_1^2-2x_1+2}=0$$

που ισχύει μόνο για $x_1=1$ αφού για $x_1\neq 1$ το

$\left(x_1-1\right)^2>0 \Leftrightarrow \left(x_1-1\right)^2+1>1 \Leftrightarrow \ell n\left[\left(x_1-1\right)^2+1\right]>0$

και $\left(x_1-1\right)^2>0 \Leftrightarrow 2\left(x_1-1\right)^2>0 \Leftrightarrow \dfrac{2\left(x_1-1\right)^2}{x_1^2-2x_1+2}>0$, άρα

$\ell n\left[\left(x_1-1\right)^2+1\right]+\dfrac{2\left(x_1-1\right)^2}{x_1^2-2x_1+2}>0$

Για $x_1=1,$ $x_2=0$ η (3) γίνεται $f(1)-f'(1)=g(0) \Leftrightarrow 1-(-1)=2 \Leftrightarrow 2=2,$ ισχύει.

Η μοναδική κοινή εφαπτομένη είναι η ε: $y=g'(0)x+g(0)-0g'(0) \Leftrightarrow y=-x+2$

Μονάδες 8